Corrigé séance G2

Corrigé des exercices de la séance G5 d'algèbre et géométrie

1) On écrit d'abord des équations d'une génératrice de la surface. A tout choix d'un point m_1 de D_1 et d'un point m_2 de D_2 tels que $\left\|\overline{m_1m_2}\right\| = 10$, correspond une génératrice.

Un point $m_1 \in D_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ a des coordonnées $(\lambda, 0, 3)$ $(\text{avec } \lambda \in \mathbb{R})$.

Un point $m_2 \in D_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = -3 \end{cases}$ a des coordonnées $(0, \mu, -3)$ $(\text{avec } \mu \in \mathbb{R})$.

$$\left\|\overline{m_1m_2}\right\| = 10 \Leftrightarrow 10 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 36} \Leftrightarrow \boxed{64 = \lambda^2 + \mu^2} \quad (*)$$

A chaque choix de 2 réels λ, μ tels que $\lambda^2 + \mu^2 = 64$ correspond donc une génératrice $G_{\lambda,\mu}$ qui coupe D_1 en $m_1 \equiv (\lambda, 0, 3)$ et D_2 en $m_2 \equiv (0, \mu, -3)$ avec $\left\|\overline{m_1m_2}\right\| = 10.$ $\Rightarrow \boxed{G_{\lambda,\mu} \equiv \begin{cases} x = \lambda - \lambda t \\ y = 0 + \mu t \\ z = 3 - 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$

Pour avoir toute la surface, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que λ, μ prennent toutes les valeurs réelles telles que $\lambda^2 + \mu^2 = 64$.

Equations de la surface S recherchée : $\begin{cases} x = \lambda - \lambda t \\ y = 0 + \mu t \\ z = 3 - 6t \\ \lambda^2 + \mu^2 = 64 \end{cases} \quad (t, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

L'équation de S s'obtient en éliminant les paramètres t, λ et μ.

$$\begin{cases} x = \lambda - \lambda t \\ y = 0 + \mu t \\ z = 3 - 6t \\ \lambda^2 + \mu^2 = 64 \end{cases} \quad (t, \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3-z}{6} \\ \lambda = \dfrac{6x}{3+z} \\ \mu = \dfrac{6y}{3-z} \\ \left(\dfrac{6x}{3+z}\right)^2 + \left(\dfrac{6y}{3-z}\right)^2 = 64 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R} - \{0,1\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right) \text{ ou } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 3 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 64 \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = -3 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 64 \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Notons que $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=3 \\ \lambda^2+\mu^2=64 \end{cases} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} \quad (\lambda\in[-8,8])$ ce qui correspond à un segment de la droite d'équation $\begin{cases} y=0 \\ z=3 \end{cases}$

De la même façon, $\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=-3 \\ \lambda^2+\mu^2=64 \end{cases} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \\ z=-3 \end{cases} \quad (\mu\in[-8,8])$ce qui correspond à un segment de la droite d'équation $\begin{cases} x=0 \\ z=-3 \end{cases}$

Equation cartésienne : $S \equiv \begin{cases} 9x^2(3-z)^2+9y^2(3+z)^2=16(9-z^2)^2 \quad \text{si } z\neq 3 \text{ et } z\neq -3 \\ [-8\leq x\leq 8 \text{ et } y=0] \quad \text{si } z=3 \\ [x=0 \text{ et } -8\leq y\leq 8] \quad \text{si } z=-3 \end{cases}$

<u>Remarque</u>: A partir de (*), on peut constater que $\lambda^2+\mu^2=64$ $\Leftrightarrow \exists\theta\in[0,2\pi[\text{ tel que } \begin{cases} \lambda=8\cos\theta \\ \mu=8\sin\theta \end{cases}$. Pour chaque choix de $\theta\in[0,2\pi[$, on a alors une génératrice $G_\theta \equiv \begin{cases} x=8(\cos\theta)(1-t) \\ y=8(\sin\theta)t \\ z=3-6t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Pour avoir toute la surface, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que θ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0,2\pi[$.

On obtient alors des équations paramétriques de la surface recherchée.

$$\begin{cases} x=8(\cos\theta)(1-t) \\ y=8(\sin\theta)t \\ z=3-6t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R},\ \theta\in[0,2\pi[)$$

Une équation cartésienne de S s'obtient en éliminant les paramètres t et θ.

---

2) Une génératrice est une droite qui

- passe par un point de $C_1 \equiv \begin{cases} z=\sqrt{x} \\ y=-1 \end{cases}$, c'est-à-dire un point $p\equiv(\lambda^2,-1,\lambda)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^+$
- passe par un point de $C_2 \equiv \begin{cases} z=\sqrt{-x} \\ y=1 \end{cases}$,, c'est-à-dire un point $q\equiv(-\mu^2,1,\mu)$ avec $\mu\in\mathbb{R}^+$
- est parallèle au plan oxy

A chaque choix de $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^+$ correspond une droite qui coupe C_1 en $p \equiv (\lambda^2,-1,\lambda)$ et qui coupe C_2 en $q \equiv (-\mu^2,1,\mu)$

Equations paramétriques : $\begin{cases} x = \lambda^2 + (-\mu^2 - \lambda^2)t \\ y = -1+2t \\ z = \lambda + (\mu - \lambda)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Il reste à exprimer sous quelles conditions sur $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^+$, cette droite est parallèle au plan oxy

Le vecteur directeur $(-\mu^2 - \lambda^2)\overline{e_1} + 2\overline{e_2} + (\mu - \lambda)\overline{e_3}$ est orthogonal au vecteur $\overline{e_3}$
$\Leftrightarrow \mu - \lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \lambda}$

A chaque choix de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ correspond donc une génératrice

$$G_\lambda \equiv \begin{cases} x = \lambda^2 - 2\lambda^2 t \\ y = -1+2t \\ z = \lambda \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Pour avoir toute la surface S, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que λ prend toutes les valeurs réelles positives.

Equations de la surface S.

$$\begin{cases} x = \lambda^2 - 2\lambda^2 t \\ y = -1+2t \\ z = \lambda \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+)$$

L'équation de S s'obtient en éliminant les paramètres t et λ.

$$\begin{cases} x = z^2 - 2z^2 \dfrac{(y+1)}{2} \\ t = \dfrac{y+1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z^2 y \\ t = \dfrac{y+1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^+)$$

Equation cartésienne : $\boxed{S \equiv yz^2 = -x \text{ avec } z \geq 0}$

---

3) Une génératrice est une droite qui

- passe par un point de Γ_1, c'est-à-dire un point $p \equiv (\cos\theta, -1, \sin\theta)$ avec $\theta \in [0,2\pi[$
- passe par un point de Γ_2, c'est-à-dire un point $q \equiv (\cos\eta, 1, \sin\eta)$ avec $\eta \in [0,2\pi[$
- passe par un point de oz

- -

A chaque choix de $\theta,\eta \in [0,2\pi[$ correspond une droite qui coupe Γ_1 en $p \equiv (\cos\theta,-1,\sin\theta)$ et qui coupe Γ_2 en $q \equiv (\cos\eta,1,\sin\eta)$.

Equations paramétriques : $G_{\theta,\eta} \equiv \begin{cases} x = \cos\theta + (\cos\eta - \cos\theta)t \\ y = -1+2t \\ z = \sin\theta + (\sin\eta - \sin\theta)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Il reste à exprimer sous quelles conditions sur $\theta,\eta \in [0,2\pi[$, cette droite coupe l'axe Oz. Cette droite coupe l'axe Oz si et seulement si

$\left[\exists\, t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos\theta + (\cos\eta - \cos\theta)t = 0 \text{ et } -1+2t = 0\right] \Leftrightarrow \cos\theta + \cos\eta = 0$

Or $[\cos\eta = -\cos\theta] \Rightarrow [\sin\eta = \sin\theta \text{ ou } \sin\eta = -\sin\theta]$

Donc à chaque choix de $\theta \in [0,2\pi[$ correspondent deux génératrices

$G_\theta \equiv \begin{cases} x = \cos\theta - 2(\cos\theta)t \\ y = -1+2t \\ z = \sin\theta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\tilde{G}_\theta \equiv \begin{cases} x = \cos\theta - 2(\cos\theta)t' \\ y = -1+2t' \\ z = \sin\theta - 2(\sin\theta)t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$

Pour avoir toute la surface S, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que θ prend toutes les valeurs dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

Equations de la surface S.

$$\begin{cases} x = \cos\theta - 2(\cos\theta)t \\ y = -1+2t \\ z = \sin\theta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi[) \text{ ou } \begin{cases} x = \cos\theta - 2(\cos\theta)t' \\ y = -1+2t' \\ z = \sin\theta - 2(\sin\theta)t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi[)$$

On obtient l'équation de S s'obtient en éliminant les paramètres.

D'une part,

$$\begin{cases} x = \cos\theta - 2(\cos\theta)t \\ y = -1+2t \\ z = \sin\theta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, \theta \in [0,2\pi[)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{x}{y} \\ t = \dfrac{1+y}{2} \\ \sin\theta = z \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \theta \in [0,2\pi[\right) \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in [0,2\pi[)$$

En éliminant le paramètre, on trouve donc, pour ce premier morceau,

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + z^2 = 1 \text{ ou } \left[x=0, y=0, -1\le z\le 1\right] \quad \Leftrightarrow x^2+y^2z^2=y^2 \;\; avec \;\; -1\le z\le 1$$

D'autre part $\begin{cases} x=\cos\theta-2(\cos\theta)t' \\ y=-1+2t' \\ z=\sin\theta-2(\sin\theta)t' \end{cases} \quad \left(t'\in\mathbb{R}, \theta\in[0,2\pi[\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=(1-2t')\cos\theta \\ y=-(1-2t') \\ z=(1-2t')\sin\theta \end{cases} \quad \left(t'\in\mathbb{R}; \theta\in[0,2\pi[\right) \quad \Leftrightarrow x^2+z^2=y^2$$

En éliminant le paramètre, on trouve donc, pour ce second morceau: $x^2+z^2=y^2$

Quand on met tout ensemble

$$\boxed{\left[x^2+y^2z^2=y^2 \text{ avec } -1\le z\le 1\right] \text{ ou } x^2+z^2=y^2}$$

<u>Autre façon de faire :</u>

Une génératrice est une droite qui

- passe par un point de Γ_1, c'est-à-dire un point $p\equiv(\cos\theta,-1,\sin\theta)$ avec $\theta\in[0,2\pi[$
- passe par un point de oz , c'est-à-dire un point $q\equiv(0,0,\lambda)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
- passe par un point de $\Gamma_2 \equiv \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=1 \end{cases}$

A chaque choix de $\theta\in[0,2\pi[, \lambda\in\mathbb{R}$ correspond une droite qui coupe Γ_1 en $p\equiv(\cos\theta,-1,\sin\theta)$ et qui coupe oz en $q\equiv(0,0,\lambda)$.

Equations paramétriques : $G_{\theta,\lambda} \equiv \begin{cases} x=(\cos\theta)t \\ y=-t \\ z=\lambda+(\sin\theta-\lambda)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Il reste à exprimer sous quelles conditions sur $\theta\in[0,2\pi[, \lambda\in\mathbb{R}$, cette droite coupe Γ_2 . Cette droite coupe Γ_2 si et seulement si

$$(-\cos\theta)^2+\left(\lambda-(\sin\theta-\lambda)\right)^2=1 \Leftrightarrow (-\cos\theta)^2+(2\lambda-\sin\theta)^2=1 \Leftrightarrow (\cos\theta)^2+4\lambda^2-4(\sin\theta)\lambda+(\sin\theta)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda(\lambda-\sin\theta)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ou } \lambda=\sin\theta$$

Donc à chaque choix de $\theta\in[0,2\pi[$ correspondent deux génératrices

$$G_\theta \equiv \begin{cases} x=(\cos\theta)t \\ y=-t \\ z=(\sin\theta)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}) \text{ et } \tilde{G}_\theta \equiv \begin{cases} x=(\cos\theta)t' \\ y=-t' \\ z=\sin\theta \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R})$$

Pour avoir toute la surface S, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que θ prend toutes les valeurs dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

Equations de la surface S.

$$\begin{cases} x=(\cos\theta)t \\ y=-t \\ z=(\sin\theta)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi[) \text{ ou } \begin{cases} x=(\cos\theta)t' \\ y=-t' \\ z=\sin\theta \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi[)$$

On obtient l'équation de S s'obtient en éliminant les paramètres.

D'une part,

$$\begin{cases} x=(\cos\theta)t \\ y=-t \\ z=(\sin\theta)t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi[) \Leftrightarrow \boxed{x^2+z^2=y^2}$$

En éliminant le paramètre, on trouve donc, pour ce premier morceau, $\boxed{x^2+z^2=y^2}$

D'autre part

$$\begin{cases} x=(\cos\theta)t' \\ y=-t' \\ z=\sin\theta \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi[)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t'=-y \\ \cos\theta=-\dfrac{x}{y} \\ \sin\theta=z \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R}_0,\theta\in[0,2\pi[) \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in[0,2\pi[)$$

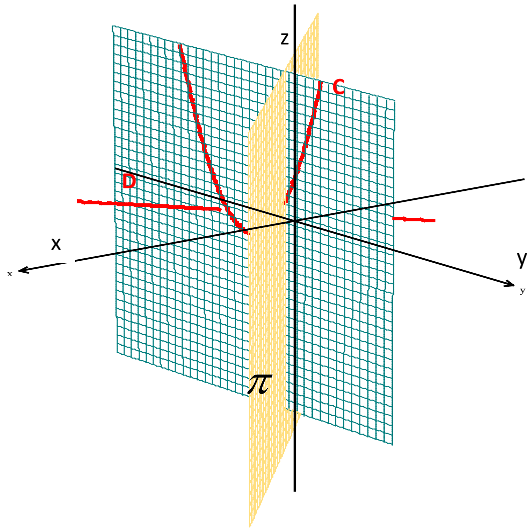
En éliminant le paramètre, on trouve donc, pour ce second morceau,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+z^2=1 \text{ ou } [x=0,y=0,-1\le z\le 1] \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2z^2=y^2 \text{ avec } -1\le z\le 1}$$

Quand on met tout ensemble $\boxed{x^2+z^2=y^2 \text{ ou } \left[x^2+y^2z^2=y^2 \text{ avec } -1\le z\le 1\right]}$

---

4) $C\equiv\begin{cases} y^2=z \\ x=1 \end{cases}$ est une parabole et S est un conoïde .



On va d'abord écrire des équations d'une génératrice de la surface réglée S.
Une génératrice est une droite qui

- passe par un point de D, c'est-à-dire un point $p \equiv (4\lambda, -1, \lambda)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$
- passe par un point de C, c'est-à-dire un point $q \equiv (1, \mu, \mu^2)$ *avec* $\mu \in \mathbb{R}$
- est parallèle au plan $\pi \equiv x = y$

A chaque choix de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ correspond une droite qui coupe D en $p \equiv (4\lambda, -1, \lambda)$ et qui coupe C en $q \equiv (1, \mu, \mu^2)$

Equations paramétriques : $\begin{cases} x = 4\lambda + (1 - 4\lambda)t \\ y = -1 + (\mu + 1)t \\ z = \lambda + (\mu^2 - \lambda)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Il reste à exprimer sous quelles conditions sur $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, cette droite est parallèle au plan $\pi \equiv x = y$

Le vecteur directeur $(1-4\lambda)\overline{e_1} + (\mu+1)\overline{e_2} + (\mu^2 - \lambda)\overline{e_3}$ est orthogonal au vecteur $\overline{e_1} - \overline{e_2}$, vecteur normal de π $\Leftrightarrow (1-4\lambda).1 + (\mu+1).(-1) + (\mu^2 - \lambda).0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = -4\lambda}$

A chaque choix de $\lambda \in \mathbb{R}$ correspond donc une génératrice

$$G_\lambda \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + (1 - 4\lambda)t \\ y = -1 + (-4\lambda + 1)t \\ z = \lambda + (16\lambda^2 - \lambda)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Pour avoir toute la surface S, on considère toutes les génératrices, c'est-à-dire que λ prend toutes les valeurs réelles

Equations de la surface S : $\begin{cases} x = 4\lambda + \left(1 - 4\lambda\right)t \\ y = -1 + \left(-4\lambda + 1\right)t \\ z = \lambda + \left(16\lambda^2 - \lambda\right)t \end{cases} \quad \left(t, \lambda \in \mathbb{R}\right)$

Pour obtenir une équation cartésienne de la surface réglée S, il faut éliminer les paramètres λ et t.

$$\begin{cases} x = 4\lambda + \left(1 - 4\lambda\right)t \\ y = -1 + (-4\lambda + 1)t \\ z = \lambda + \left(16\lambda^2 - \lambda\right)t \end{cases} \left(t, \lambda \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4\lambda + 1 \\ y = -1 + (-4\lambda + 1)t \\ z = \lambda + \left(16\lambda^2 - \lambda\right)t \end{cases} \left(t, \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - y - 1}{4} \\ t = \dfrac{y + 1}{2 - x + y} \\ z = \dfrac{x - y - 1}{4} + \dfrac{x - y - 1}{4}(4x - 4y - 5)\dfrac{y + 1}{2 - x + y} \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}\right)$$

$$\textbf{ou} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow S \equiv \begin{cases} 4\left(2 - x + y\right)z = \left(x - y - 1\right)\left(2 - x + y\right) + \left(x - y - 1\right)\left(4x - 4y - 5\right)\left(y + 1\right) & \text{si } x - y \neq 2 \\ \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} & \text{si } x - y = 2 \end{cases}$$

Donc $S \equiv 4\left(2 - x + y\right)z = \left(x - y - 1\right)\left(2 - x + y\right) + \left(x - y - 1\right)\left(4x - 4y - 5\right)\left(y + 1\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{S \equiv 4y^3 + 4x^2y - 8xy^2 + 3x^2 + 12y^2 - 15xy + 4xz - 4yz - 6x + 11y - 8z + 3 = 0}$$