

Exercice : 01 (3,5pts) ;  $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I

1) a) calcul de  $\Delta_\alpha$

$$a = 1 ; b = -2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) ; c = i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha}$$

on a :

$$\Delta_\alpha = b^2 - 4ac = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (1+2i)^2 - 8i 2^{2\alpha} e^{i2\alpha}$$

$$\Delta_\alpha = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} ((1+2i)^2 - 8i)$$

$$\Delta_\alpha = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (1 + 4i + (2i)^2 - 8i)$$

$$\Delta_\alpha = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (1 - 4i + (2i)^2)$$

ce qui fait :

$$\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2$$

b) solutions a et b de  $(E_\alpha)$  :  $|a| < |b|$

les solutions de l'équation  $(E_\alpha)$  sont

$$z_1 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2}$$

$$\text{et } z_2 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2}$$

$$\Omega \quad z_1 = 2^\alpha \cdot e^{i\alpha} (1+2i - 1+2i) = 2^{\alpha+2} \cdot e^{i\alpha} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_1 = 2^{\alpha+2} \cdot e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \text{ ma } |z_1| = 2^{\alpha+2}$$

$$\text{et } z_2 = 2^\alpha \cdot e^{i\alpha} (1+2i + 1-2i) = 2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha}$$

$$z_2 = 2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha} \text{ ma } |z_2| = 2^{\alpha+1}$$

$$\text{d'où : } |z_2| < |z_1|$$

d'où les solutions de  $(E_\alpha)$  sont :

$$a = 2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha} \text{ et } b = 2^{\alpha+2} \cdot e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

$$\text{on a bien } |a| < |b|$$

$$\text{d'où } S = \left\{ a = 2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha} ; b = 2^{\alpha+2} \cdot e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \right\}$$

e)  $\frac{b}{a}$  imaginaire pur ?

$$\text{on a } \frac{b}{a} = \frac{2^{\alpha+2} \cdot e^{i\alpha} \cdot i}{2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha}}$$

$$\text{d'où } \frac{b}{a} = 2i$$

on en déduit que  $\frac{b}{a}$  est un imaginaire pur.

### Partie II

$$\text{on pose } \frac{b}{a} = Ai \text{ avec } A = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$1) A(a) ; B(b) \text{ et } H(h) \text{ avec } \frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

a) calcul de  $\frac{h}{b-a}$

on a :  $h = \frac{ab}{a+b}$  d'où :

$$\begin{aligned}\frac{h}{b-a} &= \frac{\frac{ab}{a+b}}{b-a} = \frac{ab}{a+b} \times \frac{1}{b-a} = \frac{ab}{b^2-a^2} \\ &= \frac{\frac{ab}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}} = \frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + i^2} = \frac{Ai}{A^2 i^2 + i^2} \\ &= \frac{A}{i^2(A^2+1)} \cdot i\end{aligned}$$

Ce qui fait :  $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{A}{A^2+1}\right)i$

Déduction :

D'après ce qui précède, on a : ( $A=2$ )

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{A}{A^2+1}(-i) = \frac{2}{5} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

D'où :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

Ce qui fait, les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{OH}$  sont orthogonaux, par conséquent les droites  $(OH)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires.

b) calcul de  $\frac{h-a}{b-a}$

on a :

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{\frac{ab}{a+b} - a}{b-a} = \frac{ab - a^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{-a^2}{b^2 - a^2}$$

d'où

$$\frac{h-a}{b-a} = - \frac{\frac{a^2}{a^2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{a^2}{a^2}} = - \frac{1}{n^2 i^2 + i^2} = \frac{i^2}{i^2(n^2+1)}$$

ce qui fait

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{n^2+1}$$

Déduction:

$$\text{on a } \frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{n^2+1} \in \mathbb{R}$$

d'où les points, A, B et H sont alignés

2) I(m) le milieu de [OH]

J(n) le milieu de [HB]

a) Montrons que  $\frac{n}{m-a} = -ni$

$$\text{on a } m = \frac{h}{2} \text{ et } n = \frac{b+h}{2} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{m-a} &= \frac{\frac{h+b}{2}}{\frac{h}{2} - a} = \frac{h+b}{h-2a} = \frac{\frac{ab}{a+b} + b}{\frac{ab}{a+b} - 2a} \\ &= \frac{ab + ab + b^2}{ab - 2a^2 - 2ab} = \frac{2ab + b^2}{-ab - 2a^2} \\ &= \frac{2\left(\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{-\left(\frac{b}{a}\right) - 2} = \frac{2ni + n^2 i^2}{-ni - 2} \\ &= - \frac{n(2+ni)i}{2+ni} \end{aligned}$$

Ce qui fait :  $\frac{n}{m-a} = -ni$

c/ Montrons que les points  $K, I, H$  et  $J$  sont cocycliques.

d'après les questions précédentes.

- les points  $A, H, J$  et  $B$  sont alignés
- les points  $O, I$  et  $H$  sont alignés
- $(OH) \perp (HJ)$

D'où le triangle  $I H J$  est rectangle en  $H$   
d'où  $H$  appartient au cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[IJ]$  (1)

D'autre part

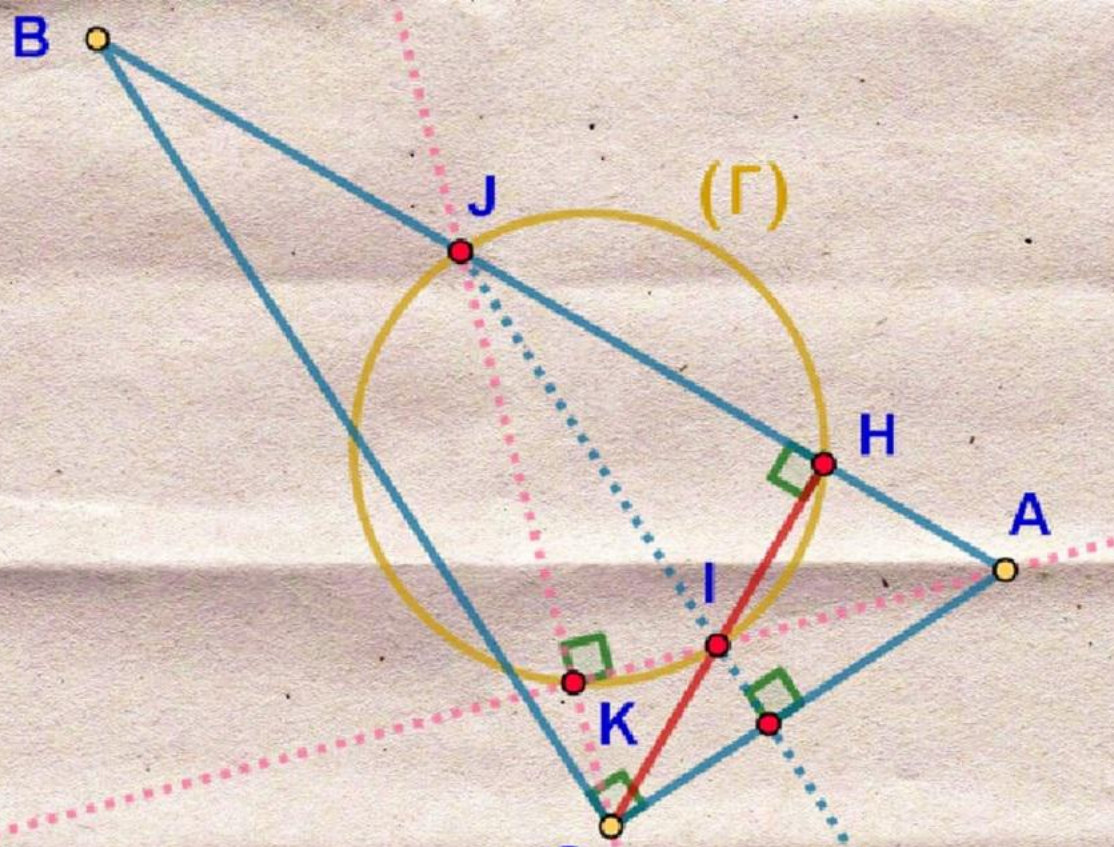
- $(OJ) \perp (AI)$
- et  $K$  le point d'intersection de  $(OJ)$  et  $(AI)$   
d'où  $(KI) \perp (KJ)$

D'où le triangle  $I K J$  est rectangle en  $K$   
d'où  $K$  appartient au cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[IJ]$  (2)

De (1) et (2) on déduit que les points  $H$  et  $K$  appartiennent au cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[IJ]$

Ceci fait :

les points  $K, I, H$  et  $J$  sont cocycliques



d) Montrons que  $(IJ) \perp (OA)$

→ dans le triangle  $OBH$ ,

$I$  est le milieu du côté  $[BH]$

$J$  est le milieu du côté  $[OH]$

Donc la droite  $(IJ)$  est parallèle à  $(OB)$  (1)

d'autre part, d'après I) 2)  $\frac{b-0}{a-0} \in i\mathbb{R}$

donc  $(OA) \perp (OB)$  (2)

de (1) et (2) on déduit que :

$$(OA) \perp (IJ)$$