

Geodäten auf dem Torus

Lösen der Eulerschen Gleichungen für die geodätischen Linien auf einem Torus:

Gegeben sei die Parameterdarstellung des Torus, u, v sind Parameter der Torusoberfläche: $x(u, v) = (R + r \cdot \cos(v)) \cdot \cos(u)$ $y(u, v) = (R + r \cdot \cos(v)) \cdot \sin(u)$ $z(u, v) = r \cdot \sin(v)$

$v=0$ (bzw. const.) und $u=0, \dots, 2\pi$ ist der waagerechte ebene Schnitt in halber Torushöhe durch großen Ring mit Radius $R=c$ und Loch. $u=0$ (bzw. const.) und $v=0, \dots, 2\pi$ ist der vertikale Schnitt der querschnittserzeugenden Kreisfläche mit Radius $r=a$.

Eulersche Gleichungen:

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) - \frac{d}{dt}u(t) \cdot \frac{d}{dt}v(t) \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\sin(v(t))}{(c + a \cdot \cos(v(t)))} = 0 \quad \frac{d^2}{dt^2}v(t) + \left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2 \cdot \frac{\sin(v(t))}{(c + a \cdot \cos(v(t)))} = 0 \quad u(t_1) = u_1 \quad v(t_1) = v_1 \quad u(t_2) = u_2 \quad v(t_2) = v_2$$

Parameter gewählt für Testzwecke:

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 1 \quad u_1 := 0 \quad v_1 := \frac{5}{10} \cdot \pi \quad u_2 := \frac{7}{10} \cdot \pi \quad v_2 := \frac{1}{2} \cdot \pi$$

Für den Lösungsblock mit Hilfe z. B. von Rkadapt ist ein explizites System erster Ordnung mit Anfangswerten - nicht Randwerten - erforderlich.

$$\frac{d}{dt}u(t) = w(t) \quad \frac{d}{dt}v(t) = x(t) \quad \frac{d}{dt}w(t) = w(t) \cdot x(t) \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\sin(v(t))}{(c + a \cdot \cos(v(t)))} \quad \frac{d}{dt}x(t) = -w(t)^2 \cdot \frac{\sin(v(t))}{a} \cdot (c + a \cdot \cos(v(t)))$$

Die Randwerte $u(t_2)=u_2$ und $v(t_2)=v_2$ werden in Anfangsbedingungen für $w(t)$ und $x(t)$ umgerechnet: $w(t_1)=w_1$, $x(t_1)=x_1$

Parameter des Torus $a := 30$ $c := 100$

Konvertieren von Randwerten in Anfangswerte für gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}u(t) = w(t) \quad \frac{d}{dt}v(t) = x(t) \quad \frac{d}{dt}w(t) = w(t) \cdot x(t) \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\sin(v(t))}{(c + a \cdot \cos(v(t)))} \quad \frac{d}{dt}x(t) = -w(t)^2 \cdot \frac{\sin(v(t))}{a} \cdot (c + a \cdot \cos(v(t)))$$

Anfangsbedingungen: $u(t_1) = u_1$ $v(t_1) = v_1$

Randwerte am Intervallende: $u(t_2) = u_2$ $v(t_2) = v_2$

Zwei Anfangswerte sind gegeben, die zwei Randwerte an der Stelle $t=t_2$ werden umgerechnet in Anfangswerte für die 1. Ableitungen von u und v in $t=t_1$. Das sind die Anfangswerte für w und x .

Schätzwerte für die fehlenden Anfangswerte von $w(0)$ und $x(0)$, die zu den gegebenen Randwerten von $u(1)$ und $v(1)$ am Intervallende gehören:

$$v := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition der Funktion load, die dann mit sbval verarbeitet wird:

$$\text{load}(t_1, v) := \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Umwandlung der gegebenen DGL in ein System 1. Ordnung, rechte Seiten des expliziten Systems:

$$D(\text{tonne}, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_2 \cdot y_3 \cdot 2 \cdot a \cdot \frac{\sin(y_1)}{c + a \cdot \cos(y_1)} \\ -(y_2)^2 \cdot \left[\frac{\sin(y_1)}{a} \cdot (c + a \cdot \cos(y_1)) \right] \end{bmatrix}$$

Definition der Funktion score zur Einstellung der gesuchten Anfangswerte derart, daß im Intervallende $t=t_2$ die Randwerte erfüllt werden, score minimiert die Differenz:

$$\text{score}(t_2, y) := \begin{pmatrix} y_0 - u_2 \\ y_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

Laden der Funktion sbval, die als Ergebnis die Spalte der fehlenden Anfangsbedingungen liefert:

$$s := \text{sgrw}(v, t_1, t_2, D, \text{load}, \text{score})$$

Lösung für die 1. Ableitungen in $t=t_1$:

$$s = \begin{pmatrix} 1.409 \\ 4.324 \end{pmatrix}$$

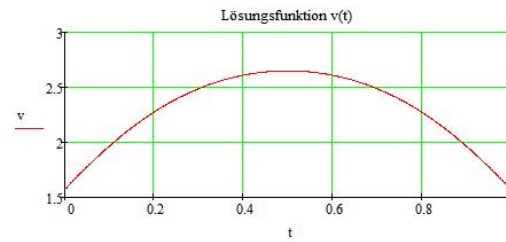
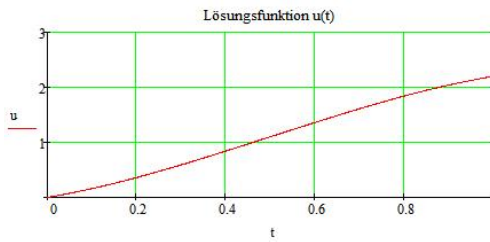
Lösung des Gleichungssystems mit Anfangswerten:

$$A_1(t, y) := D(t, y)$$

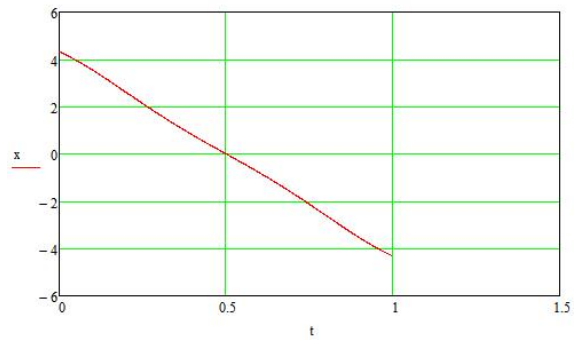
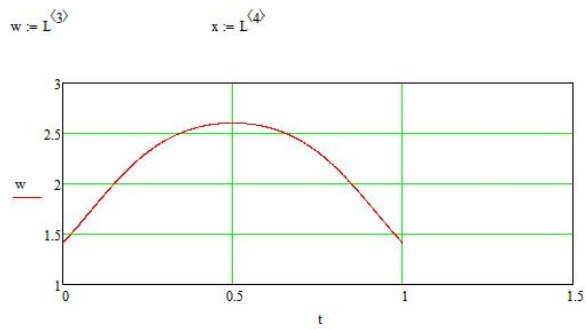
nt := 1000 Anzahl der Lösungswerte bei [t0, t1]

$y0 := \begin{pmatrix} u1 \\ v1 \\ s0 \\ s1 \end{pmatrix}$ L := Rkadapt(y0, t1, t2, nt, A1) t1 Anfangswert der unabhängigen Variable t2 Endwert der unabhängigen Variable Anfangswerte für u, v, w, x

t := L⁽⁰⁾ Werte der unabhängigen Variable u := L⁽¹⁾ Werte der ersten Lösungsfunktion u(t) v := L⁽²⁾ Werte der zweiten Lösungsfunktion v(t)



Erste Ableitungen w und x von u bzw. v:



Darstellung des Torus:

netz := 50 Maß für die Vernetzung der Torusstruktur und damit seiner optischen "Rundheit"

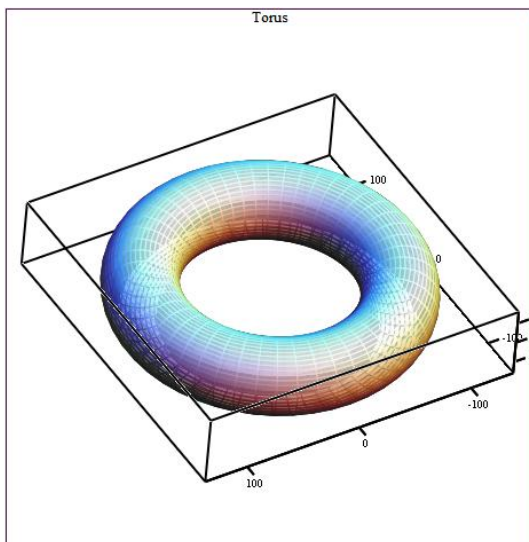
m := 0..netz

n := 0..netz

r := a

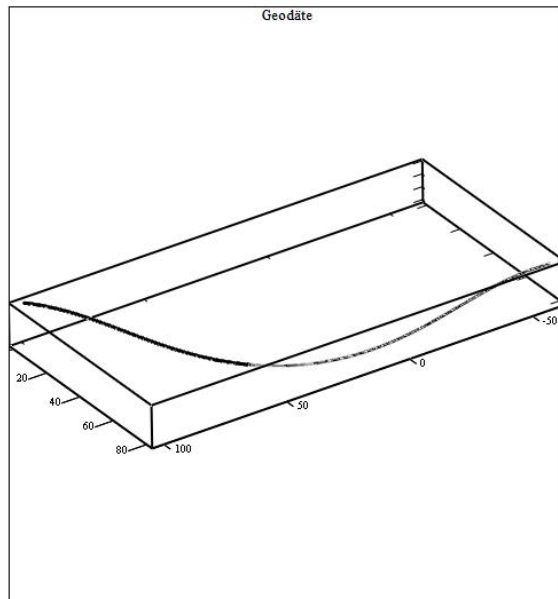
R := c

$$\phi_m := 2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{\text{netz}} \quad \theta_n := 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{\text{netz}} \quad X_{m,n} := (R + r \cdot \cos(\theta_n)) \cdot \cos(\phi_m) \quad Y_{m,n} := (R + r \cdot \cos(\theta_n)) \cdot \sin(\phi_m) \quad Z_{m,n} := r \cdot \sin(\theta_n)$$

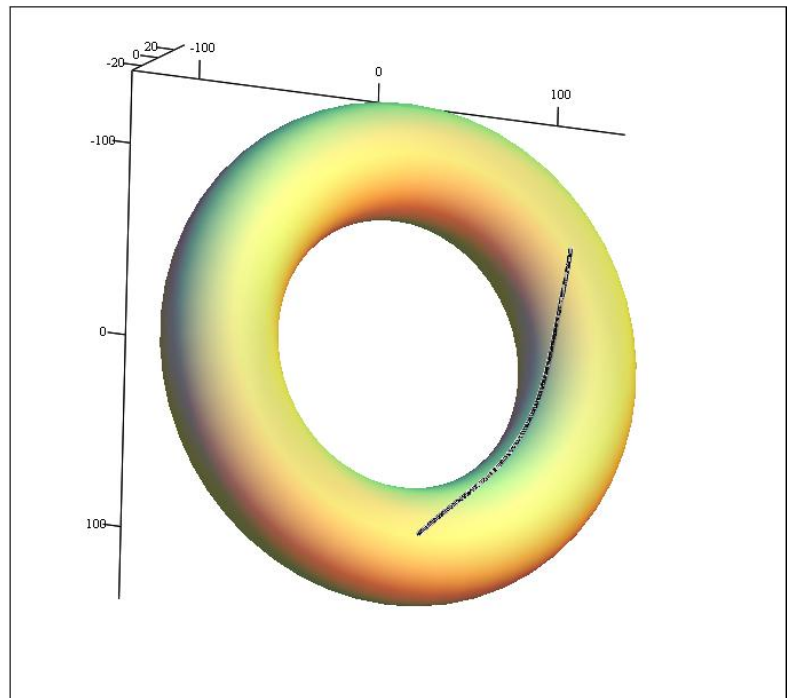


(X, Y, Z)

Darstellung der Geodäten: $i := 0 \dots nt$ $G1_i := (R + r \cdot \cos(v_i)) \cdot \cos(u_i)$ $G2_i := (R + r \cdot \cos(v_i)) \cdot \sin(u_i)$ $G3_i := r \cdot \sin(v_i)$



(G1, G2, G3)



(X, Y, Z), (G1, G2, G3)